

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Rosane Maria Mazzer Carvalho

Planificação, Superfície e Volume de um Cone

Construção de um Chapéu de Bruxa

Novembro 2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Rosane Maria Mazzer Carvalho

Planificação, Superfície e Volume de um Cone

Construção de um Chapéu de Bruxa

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, da Unicamp, como requisito parcial para a conclusão do curso de especialização em Matemática, sob a supervisão da Profa. Eliana Contharteze Grigoletto.

Campinas

2011

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo incentivar os alunos do Ensino Médio na aprendizagem da Geometria por meio da construção do chapéu de bruxa, uma vez que somente com o uso de fórmulas não é possível obter resultados satisfatórios. Desta forma, os alunos manusearão o material e, partindo da construção e observação dos elementos do cone e do cilindro, poderão chegar à demonstração das fórmulas de maneira concreta. A aprendizagem deverá ser construída para não ser esquecida, com o objetivo de ser utilizada no dia a dia.

Palavras-chave: aprendizagem de Geometria, Geometria Espacial, cone.

ABSTRACT

This paper aims to encourage high school students in learning geometry by building the witch's hat. Since only the use of formulas does not obtain satisfactory results, thus, the students will handle the material, and based on the construction and observation of the elements of the cone and the cylinder can reach the statement of formulas in a practical way. Learning should be built not to be forgotten, in order to be used in day to day lives.

Keywords: geometry learning, spatial geometry, cone.

Sumário

1 O Cone: Um Pouco de História e Teoria	7
1.1 Um Pouco da História.....	7
1.2 O Número π	8
1.3 A Circunferência.....	8
1.4 O Círculo.....	9
2 Atividades Práticas: A Construção do Chapéu de Bruxa	10
2.1 Construção da Circunferência.....	10
2.2 Construção do Círculo.....	10
2.2.1 Área da Coroa Circular	11
2.3 Construção do Cilindro	11
2.3.1 Área do Cilindro	11
2.3.2 Volume do Cilindro.....	12
2.4 Construção do Cone.....	12
2.4.1 Área do Setor Circular	12
2.4.2 Área Total do Cone.....	12
2.4.3 Volume do Cone	13
2.4.4 Construção do Chapéu	15
Considerações finais.....	20
Referências bibliográficas	21

INTRODUÇÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo incentivar os alunos a estudarem mais sobre o assunto Geometria. Com a atividade voltada à confecção do chapéu de bruxa pretende-se explorar muitos conceitos e conteúdos da Matemática. Neste sentido, buscou-se, neste trabalho, desenvolver um conjunto de estratégias metodológicas para o ensino de Geometria, a fim de resgatar o interesse dos educandos em relação ao estudo deste assunto.

De início, serão apresentados um pouco da história, os matemáticos envolvidos nos estudos para se chegar ao descobrimento das fórmulas, o tempo em que ocorreu e como conseguiram tal façanha. A construção histórica do conhecimento matemático leva à maior compreensão da evolução do conceito. No estudo da Geometria, precisamos das fórmulas que os matemáticos descobriram. Por isso, neste trabalho são apresentadas as demonstrações, medições, construções, verificações. Enfim, o estudo tem como foco “o fazer Matemática”, resgatar a história dos conceitos matemáticos.

O número π : na construção do chapéu, serão feitas medições do comprimento da circunferência, dividindo-o pelo diâmetro do círculo para chegar ao valor aproximado do número π . Chegando, assim, à fórmula do comprimento da circunferência.

Para a área do círculo, será utilizado o método da decomposição do círculo em setores, colocando um ao lado do outro, aproximando a área como a de um retângulo.

Com o cilindro, por meio da sua planificação, é possível demonstrar a área lateral, da base e a área total, fazendo as medições e os cálculos. Em relação ao volume, cada grupo de alunos apresentará um cilindro e, com o material, irá calcular o volume, e fazer a atividade de encher o recipiente com água para medir o volume, transformando as grandezas de medidas de litros para centímetros cúbicos e vice-versa.

Chegando ao cone: nesta fase, também por meio da planificação, serão feitos os cálculos para determinar as áreas da base, lateral e total. Também será realizado o estudo de cada parte do cone, ou seja, raio, geratriz, altura, ângulo do setor circular, bem como a verificação das fórmulas com demonstrações. O volume também será trabalhado neste momento. Como no cilindro, será usada água para encontrar o volume do cone, enchendo-se um cone e um cilindro de mesmo raio e altura com água e mergulhando-se o cone dentro do cilindro, para encontrar, assim, o volume do cone por meio da água restante e da

água que vazou do cilindro.

Depois dos conteúdos apresentados aos alunos, será confeccionado o chapéu de bruxa. O objetivo principal desta atividade será desenvolver a criatividade, o trabalho em equipe, a participação de cada um dentro do grupo e, principalmente, despertar a curiosidade em relação à Geometria, uma área da Matemática muito importante e que passa despercebida pelos alunos quando ensinada apenas com fórmulas. Além disso, tem como proposta tentar fazer com que os alunos percebam a importância da Geometria no dia a dia, seja na arte, na indústria, nas embalagens, nas construções, etc. Enfim, de maneira geral em nossas vidas.

1. O Cone: Um Pouco de História e Teoria

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

Carl Friedrich Gauss

Este capítulo apresenta um pouco da história da Matemática para que se possa refletir sobre como as pessoas, diante da necessidade de efetuar cálculos para resolver situações-problema do cotidiano, estudavam e descobriam maneiras surpreendentes de chegar aos resultados, sem qualquer ferramenta e material sofisticado. Hoje, depois de muitos anos, com a tecnologia de ponta disponibilizando ideias e fórmulas prontas de como se chegar ao resultado, percebe-se que existe muita dificuldade na interpretação das situações-problema e na aplicação de fórmulas. Em seguida, será apresentada a parte teórica da Geometria Espacial, no estudo do cone.

1.1 Um Pouco da História

Os povos da Antiguidade precisavam descobrir a resolução de situações-problema com que se deparavam no dia a dia. Por meio de muitos estudos, é que matemáticos, engenheiros, médicos, filósofos, entre outros, conseguiram chegar a descobertas incríveis.

A Matemática era importante para os antigos egípcios, devido à necessidade de realizar a medição de áreas com precisão, pois as cercas que demarcavam suas propriedades eram levadas pelas águas das cheias do rio Nilo. Eles sabiam medir áreas de figuras com lados retos, transformavam-nas em triângulos para fazer os cálculos, mas, quando se tratava de curvas, o cálculo tornava-se inatingível.

Assim como os egípcios, outros povos precisavam descobrir cálculos com precisão para resolver situações-problema. A roda, descoberta há aproximadamente seis mil anos, na Antiga Mesopotâmia, hoje denominada Oriente Médio, foi muito importante no transporte.

No século XIX a.C., é que os egípcios descobriram fatos importantes sobre comprimentos do diâmetro e da circunferência de um círculo.

Por volta de 400 a.C., os gregos descobriram um número chamado irracional, número este com infinitas casas decimais, o π (pi), resultado da divisão do comprimento pelo diâmetro de uma circunferência.

Arquimedes, nascido em Siracusa por volta de 287 a.C., estudou no Egito, foi matemático e engenheiro muito famoso, e suas descobertas foram muito importantes para a humanidade. (Marion Smoothey, 1998, p. 43).

1.2 O Número π

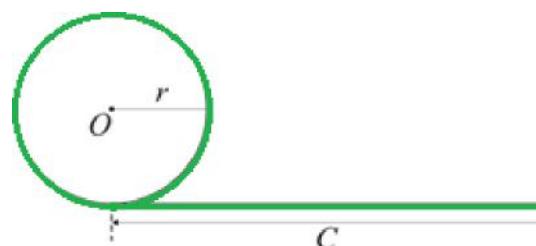
Muitos matemáticos chegaram a conclusões importantes sobre o número π , hoje expresso aproximadamente por 3,1415692. Arquimedes, na Grécia antiga, chegou a um valor entre $3\frac{10}{77}$ e $3\frac{1}{7}$. Em 1500 a.C., os egípcios utilizavam 3,16. Por volta de 480, um matemático chinês chegou a um valor entre 3,1415926 e 3,1415927. Al-Kashi, um árabe, conseguiu escrever o número π com 16 casas decimais, isto em 1430. Entre 1600 a 1700, na Europa, seu cálculo chegou a 30 casas decimais, e atualmente com os computadores consegue-se chegar a milhões de casas decimais para este número.

Todos esses valores devem-se à razão entre a medida da circunferência pela medida de seu diâmetro. (Giovane, 2009, p. 315).

Como o número resultante da divisão tem infinitas casas decimais, foi chamado de π , um símbolo utilizado nas fórmulas para simplificar sua anotação. É comum o uso de 3,14, uma aproximação para este número.

1.3 A Circunferência

A circunferência foi definida como o conjunto de todos os pontos de um plano, os quais estão à mesma distância de um ponto chamado centro. A distância do centro à extremidade da circunferência é denominada raio r .



1.4 O Círculo

Muitos estudiosos obtiveram aproximações para a área do círculo. Eles tentavam descobrir um quadrado que tivesse a área de um círculo (a quadratura do círculo). No Papiro de Rhind, documento egípcio que data de cerca de 1650 a.C, o escriba egípcio Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades.

Comparando com a fórmula de hoje, $A = \pi r^2$, observa-se que a regra egípcia equivale a atribuir a π o valor aproximado de 5,16. Para a época, este valor era bem aceitável. Somente em 1882, Ferdinand Von Lindemann provou que é impossível construir, com régua e compasso, uma região quadrada com área igual à de um círculo. Hoje, com equipamentos mais sofisticados, isto é possível. Para obter mais detalhes, veja (Carl B. Boyer, 1996, p.8), (Joamir Souza, 2010, p. 202) e (Dante, 2009, p. 248).

Arquimedes conseguiu demonstrar que é possível construir um triângulo com área igual à de um círculo. A área do triângulo é igual ao produto da metade da medida da base pela altura e a área do círculo é igual ao produto da metade do comprimento da circunferência pelo raio.

Área do triângulo = $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$ e Área do círculo = $\frac{1}{2} \times C \times r$. Como $C = 2 \pi r$, então a área do círculo = πr^2 . (ver figura 1)

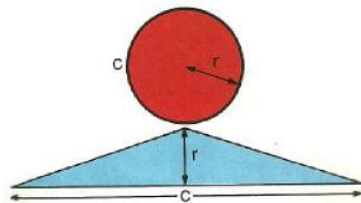


Figura 1

Atualmente, os autores de livros didáticos utilizam a decomposição do círculo em um número par de setores que, quando colocados lado a lado, formam uma figura que lembra um paralelogramo, e a fórmula se aproxima da fórmula para a área do círculo $A = \pi r^2$. (ver figuras 2 e 3).

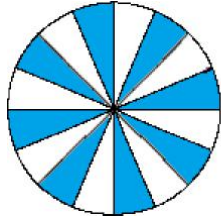


Figura 2

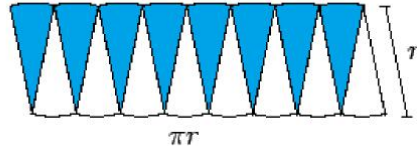


Figura 3

2 Atividades Práticas: A Construção do Chapéu de Bruxa

Neste capítulo, são apresentadas algumas atividades práticas feitas em sala de aula, nas quais foram explorados os conceitos abordados, fazendo-se construções, com o objetivo de relacionar fatos estudados com a prática.

2.1 Construção da Circunferência

Foi feita a medição do contorno e do diâmetro da circunferência do centro da quadra da escola (veja a foto abaixo). Para esta tarefa, foram utilizados barbante e fita métrica. Com as medidas anotadas pelos alunos, foram feitos os cálculos da razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência, e eles chegaram à medida de 3,138. A atividade foi realizada com outras peças circulares para o mesmo cálculo e os alunos chegaram sempre ao número aproximado 3,14. Para eles, o resultado foi surpreendente. Questionaram a aproximação dos resultados, pois as circunferências eram de tamanhos diferentes.



Depois da experimentação, foi demonstrada a fórmula do comprimento da circunferência: $\frac{C}{d} = \pi$ ou $C = 2 \cdot r \cdot \pi$ e resolvidas algumas situações-problema.

2.2 Construção do Círculo

Os alunos desenharam um círculo, escolhendo a medida do raio, dividiram-no em 16 setores, calculando a medida do ângulo de cada setor, e depois recortaram cada um e colaram um ao lado do outro, para obter uma figura parecida com um paralelogramo. Calcularam a área do paralelogramo e do círculo, comparando as medidas resultantes de cada um.

2.2.1 Área da Coroa Circular

Nesta atividade, foram construídas circunferências concêntricas, e calculada a área das duas. Subtraindo uma da outra, os alunos obtiveram a área da coroa circular, obtendo assim a fórmula:

$$A_c = \pi (R^2 - r^2)$$

2.3 Construção do Cilindro

Os alunos fizeram uma atividade prática na construção do cilindro, calculando primeiro a área e depois o volume.

2.3.1 Área do Cilindro

Depois da demonstração da planificação de um cilindro, os alunos confeccionaram a planificação de um cilindro com papel-cartão. Cada grupo tinha uma medida para o raio. Sabendo a medida do raio, tiveram de calcular inicialmente a medida do comprimento da circunferência para depois calcular a medida do comprimento e da largura do retângulo. Em seguida, foi feito o cálculo das áreas da base, da lateral e total do cilindro.



2.3.2 Volume do Cilindro

Cada grupo levou para esta atividade objetos cilíndricos, tais como copos, utensílios domésticos e latas de embalagens para calcular o volume. Primeiro, determinaram a área da base do cilindro, utilizando a fórmula $A = \pi \cdot r^2$; depois, multiplicaram por sua altura, encontrando assim o volume do cilindro e chegando à fórmula $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Para terminar esta atividade, foram utilizadas grandezas de medidas de volume e capacidade, e feita a transformação do valor calculado de cm^3 para litros. Os alunos também mediram a água e colocaram no cilindro, constatando assim a veracidade da fórmula.



2.4 Construção do Cone

Os alunos fizeram uma atividade prática, calculando a área e o volume do cone.

2.4.1 Área do Setor Circular

Em papel-cartão, foram desenhados dois círculos de mesmo raio, e traçado o setor circular. Cada grupo escolheu o ângulo central, recortou o setor e depois foram feitas comparações entre a área deste setor com o ângulo central e a área total com o ângulo de 360°. Os alunos perceberam as grandezas diretamente proporcionais existentes. Utilizando a fórmula $A = \pi.r^2$ e a regra de três simples, puderam calcular a área aproximada do setor circular:

$$\begin{aligned} 360^\circ &\rightarrow \pi.r^2 \\ \alpha &= A_s \end{aligned}$$

Onde α = ângulo do setor, r = raio e A_s = área do setor circular. (Dante, 2010, p.256)

2.4.2 Área Total do Cone

Aqui foi introduzida a fórmula para a área lateral do cone circular: $Sl = \pi.r.g$. Como a área do cone é igual à área da base somada à área lateral, então, tem-se a fórmula da área total.

$$St = \pi.r(g+r)$$

2.4.3 Volume do Cone

Para o cálculo do volume, cada grupo de três alunos confeccionou com papel-cartão, um cone de raio e altura iguais aos de um cilindro (latas de embalagens), recobrando-os com plástico adesivo Con-Tact. Assim, puderam calcular o volume do cilindro e do cone, percebendo que o volume do cone é igual a um terço do volume do cilindro.

Para que esta atividade ficasse mais interessante, foram calculados, em medidas de capacidade, os volumes citados. Os alunos mediram e colocaram água nos recipientes, demonstrando, assim, a fórmula do volume do cone.



2.4.4 Construção do Chapéu

Em grupos de três alunos, sendo um deles escolhido pelo grupo, foi feito o chapéu, de acordo com a medida do contorno de sua cabeça, e a altura do chapéu variou de grupo para grupo.

Foi medido o contorno da cabeça de cada aluno escolhido. Em seguida, foram feitos os cálculos para determinar o ângulo do setor circular.

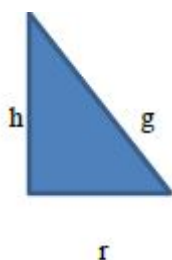
Exemplo: 60 cm de comprimento da circunferência da cabeça e altura do chapéu de 40 cm. A partir destas medidas, obtiveram o ângulo do setor circular.

$$C = 2 \cdot \Pi \cdot r$$

$$60 = 2 \cdot 3,14 \cdot r$$

$$r \cong 9,55$$

Aqui foi feita a explicação da geratriz do cone e feito seu cálculo através do Teorema de Pitágoras.



$$g^2 \cong (40)^2 + (9,55)^2$$

$$g^2 \cong 1600 + 91,2$$

$$g^2 \cong 1691,2$$

$$g \cong 41,12$$

Como a geratriz (g) do cone reto é o raio do setor circular, então $g = R$, foram feitos os cálculos para obtenção do ângulo (α) do setor circular. O raio da circunferência da cabeça é igual à geratriz, $g = R$, e o comprimento do arco do setor (l). Utilizando a regra de três, tem-se que:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{l}{2.\pi.R}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{60}{2,3,14,41,12}$$

$$258,23 \alpha = 21600$$

$$\alpha \cong 83,6^\circ$$

Com régua, foi traçado o valor da geratriz. Usando-se o transferidor, foi medido o ângulo do setor circular e depois traçada a outra geratriz, e para o arco da base foi utilizado o compasso de madeira de lousa.

Feita a colagem das bordas do setor circular, chegaram ao cone sem a base, pois nesta atividade não há necessidade.



Para terminar o chapéu, foi construída a coroa circular. Para isso, os alunos desenharam dois círculos concêntricos – um com raio igual ao da base do cone (9,55 cm), e o outro com 17,55 cm. Deixaram uma borda em relação ao círculo menor, para que pudessem colar no cone; retiraram

o círculo menor; e fizeram recortes em forma de triângulo para dobrar e colar, formando assim a aba do chapéu.



Finalizando a tarefa, cada grupo fez a decoração do chapéu da maneira que os alunos quisessem e achassem melhor.



O ângulo central do setor define a forma do cone. Se o cone tiver um raio pequeno, comparado à sua altura (chapéu de bruxa), o ângulo do setor será pequeno; e, se o raio for grande, comparado com sua altura (chapéu chinês), o ângulo também será grande. (Lima, 2006, p. 268).



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, os alunos conseguiram, a partir de um pouco da história, das experiências e das construções, observar o quanto a Matemática é importante na nossa vida diária.

A construção do chapéu proporcionou uma expectativa no grupo escolar, pois os alunos tiveram de estudar cada parte do cone. Cada item citado era demonstrado, calculado até que chegassem à sua fórmula final.

A atividade da confecção dos chapéus foi um sucesso. Os alunos queriam terminar logo para ver como ficariam depois de pronto. Fizeram as decorações e cada grupo inventou uma maneira de deixar seu chapéu bonito.

O trabalho em grupo é muito importante. Cada um contribuiu com o que sabia, e todos aprenderam também com os erros. Por exemplo: depois de feita a medição, os alunos perceberam que um copo parecido com um cilindro era, na verdade, um tronco de cone. Outro erro foi dois grupos terem colado o cone ultrapassando a linha demarcada. Assim sendo, o comprimento da circunferência do chapéu ficou menor que o da aba e, conseqüentemente, o chapéu não coube na cabeça do aluno.

Hoje, neste mundo da tecnologia, necessitamos aprender a aprender, e com este trabalho aprendemos que, na prática, as coisas não são tão difíceis quanto aparentam ser.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, São Paulo, Ed. Edgard Blucher, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**, 9º ano, São Paulo, Ed. Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Contexto & Aplicações**, São Paulo, Ática, 2010.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy; CASTRUCCI Benedito. **A Conquista da Matemática**, 9º ano, São Paulo, FTD, 2009.

SMOOTHEY, Marion. **Investigação Matemática**, Círculos. Ed. Scipione, 1998.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. vol. 2, São Paulo, FTD, 2010.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO Paulo Cezar Pinto; WAGNER Eduardo; MORGADO Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 2, Rio de Janeiro, SBM, 2006.